Leçon n° 156 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

$\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

I/ Rappels sur les polynômes d'endomorphismes. [MAN]

Théorème 1 : L'application $\mathbb{K}[X] \to \mathcal{L}(E)$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres et son image est $\mathbb{K}[u]$.

Proposition 2 : L'idéal annulateur est engendré par le polynôme minimal.

Remarque 3 : C'est vrai pour les matrices.

Définition 4 : Polynôme caractéristique.

Proposition 5 : λ est une valeur propre de u si et seulement si $\chi_u(\lambda) = 0$.

Proposition 6 : Si F est stable alors $\chi_{u_{|F}}$ divise χ_u et il en est de même pour le polynôme minimal.

Théorème 7 : Théorème de Cayley-Hamilton.

Lemme 8 : Lemme des noyaux.

II/ Endomorphismes trigonalisables.

A/ Caractérisations. [ROM]

Définition 9 : Endomorphismes trigonalisables.

Proposition 10 : u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé.

Exemple 11 : Dans $\mathbb{C}$, qui est algébriquement clos, tous les endomorphismes sont trigonalisables.

Exemple 12 : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 13 : Si F est u-stable et u est trigonalisable alors $u|_F$ est trigonalisable.

Corollaire 14 : La trace est la somme des valeurs propres et le déterminant le produit.

B/ Cotrigonalisation. [ROM]

Lemme 15 : Si $uv = vu$ alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont u-stables.

Proposition 16 : Cotrigonalisation.

Exemple 17 : Si u et v commutent et sont trigonalisables alors $u + v$ est trigonalisable.

C/ Propriétés topologiques. [ROM]

Proposition 18 : $\overline{D_n(\mathbb{R})} = T_n(\mathbb{R})$.

Proposition 19 : $D_n(\mathbb{C})$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.

III/ Endomorphismes nilpotents.

A/ Caractérisations. [ROM]

Définition 20 : Endomorphismes nilpotents.

Exemple 21 : Exemple où $\mu_u = X^p$ et $\chi_u = X^n$.

Proposition 22 : u est nilpotent diagonal si et seulement si $u = 0$.

Proposition 23 : $p \leq n$ et l'égalité a lieu si et seulement si $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$.

Application 24 : Si u est nilpotent d'ordre n, u est trigonalisable et sa matrice dans la base $(x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x))$ où $f^{n-1}(x) \neq 0$ est un bloc de Jordan.

Proposition 25 : u est nilpotent si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Tr}(u^k) = 0$.

Corollaire 26 : Si F est u-stable et u est nilpotent alors $u|_F$ est nilpotent.

Proposition 27 : Si $uv = vu$ et sont nilpotents alors $u + v$ et uv sont nilpotents.

B/ Réduction des endomorphismes nilpotents. [ROM]

Développement 1

Théorème 28 : Théorème de réduction de Jordan pour les nilpotents.

Corollaire 29 : Théorème de réduction de Jordan dans le cas général.

Corollaire 30 : Deux endomorphismes trigonalisables sont semblables si et seulement s'ils ont la même réduction de Jordan.

C/ Noyaux itérés et tableaux de Young. [MAN]

Proposition 31 : Suite des noyaux itérés.

Proposition 32 : La suite des différences est décroissante.

Définition 33 : Tableau de Young et cas des endomorphismes nilpotents (annexe).

Proposition 34 : Si $d_1 \geq \cdots \geq d_r$, $\operatorname{diag}(J_{d_1}, \ldots, J_{d_r})$ est nilpotent d'ordre d_1.

Proposition 35 : Lien entre tableau de Young et réduction de Jordan.

Théorème 36 : Deux endomorphismes nilpotents sont semblables si et seulement s'ils ont les mêmes tableaux de Young.

IV/ Décomposition de Dunford. [ROM] [BER]

Proposition 37 : Décomposition de Dunford.

Développement 2

Proposition 38 : Algorithme de décomposition de Dunford via méthode de Newton.

Application 39 : Calcul de l'exponentielle de matrice.

Application 40 : Résolution de $Y' = AY$.

Références :

— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 675-682, p. 685
— [MAN] Mansuy p. 1-48, p. 93, p. 107-117
— [BER] Berhuy Algèbre le grand combat p. 941